Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 84

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

21 de diciembre de 2022

1. Calcular la transformación a sistema de centro de masas.

Vamos a generalizar las fórmulas para un número arbitrario de cuadrimomentos; $\begin{pmatrix} E_1 \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} E_n \\ \vec{p}_n \end{pmatrix}$, queremos encontrar la transformación que transforma estos cuadrimomentos al sistema de centro de masas.

Podemos empezar calculando las coordenadas del cuadrivector $\sum_i p_i$;

$$\sum_i p_i = \begin{pmatrix} \sum_i E_i \\ \sum_i \vec{p}_i \end{pmatrix}$$

Si ya se cumple que $\sum_i \vec{p}_i = 0$ no se tiene que hacer absolutamente nada, por lo que de ahora en adelante vamos a asumir que $\sum_i \vec{p}_i \neq 0$ (lo cual implica que $\sum_i E_i \neq 0$). El trimomento cambia de la siguiente forma bajo transformaciones de Lorentz;

$$\vec{p} \to \vec{p} + (\gamma - 1)(\vec{p} \cdot \hat{v})\hat{v} - \gamma E \vec{v} \tag{1}$$

Por lo que necesitamos encontrar una velocidad $\vec{v}$ que solucione la ecuación

$$\sum_i \vec{p}_i + (\gamma - 1)\left(\sum_i \vec{p}_i \cdot \hat{v}\right)\hat{v} - \gamma\left(\sum_i E_i\right)\vec{v} = 0$$

Haciendo el producto escalar con $\hat{v}$ y multiplicando luego por $\hat{v}$, podemos reescribir la ecuación como

$$\sum_i (\vec{p}_i \cdot \hat{v})\hat{v} + (\gamma - 1)\left(\sum_i \vec{p}_i \cdot \hat{v}\right)\hat{v} - \gamma\left(\sum_i E_i\right)\vec{v} = 0$$

Restando ambas expresiones obtenemos la conclusión que $\sum_i (\vec{p}_i \cdot \hat{v})\hat{v} = \sum_i \vec{p}_i$, por lo que la primera ecuación la podemos reescribir como

$$\sum_i \vec{p}_i + (\gamma - 1)\sum_i \vec{p}_i - \gamma\left(\sum_i E_i\right)\vec{v} = \gamma\left(\sum_i \vec{p}_i - \left(\sum_i E_i\right)\vec{v}\right) = 0 \Longrightarrow \vec{v} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\sum_i E_i}$$

Esto nos permite calcular el valor de γ:

$$\gamma = \frac{\sum_i E_i}{\sqrt{(\sum_i E_i)^2 - (\sum_i \vec{p}_i)^2}} \tag{2}$$

Una vez calculado esto, simplemente debemos aplicar la transformación a cada cuadrimomento individual p_i; recordemos que la energía transforma de la siguiente forma

$$E \to \gamma\left(E - \vec{v} \cdot \vec{p}\right)$$

Por lo que en nuestro caso tenemos

$$E_j^{CM} = \frac{\sum_i E_i}{\sqrt{(\sum_i E_i)^2 - (\sum_i \vec{p}_i)^2}}\left(E_j - \frac{(\sum_i \vec{p}_i) \cdot \vec{p}_j}{\sum_i E_i}\right) = \frac{(\sum_i E_i)\, E_j - (\sum_i \vec{p}_i) \cdot \vec{p}_j}{\sqrt{(\sum_i E_i)^2 - (\sum_i \vec{p}_i)^2}}$$

Los trimomentos los podemos separar en dos componentes;

$$\vec{p} = \vec{p} + (\vec{p}\cdot\hat{v})\hat{v} - (\vec{p}\cdot\hat{v})\hat{v} = (\vec{p}\cdot\hat{v})\hat{v} + (\vec{p} - (\vec{p}\cdot\hat{v})\hat{v}) = \vec{p}_{\parallel} + \vec{p}_{\perp} \tag{3}$$

Con esta definición podemos escribir el momento en el centro de masas como

$$\vec{p}^{\,CM}_{\parallel,j} = \gamma(\vec{p}_{\parallel,j} - E_j\vec{v}) = \frac{\sum_i E_i}{\sqrt{(\sum_i E_i)^2 - (\sum_i \vec{p}_i)^2}}\left(\vec{p}_{\parallel,j} - \frac{(\sum_i \vec{p}_i)E_j}{\sum_i E_i}\right) = \frac{(\sum_i E_i)\,\vec{p}_{\parallel,j} - E_j(\sum_i \vec{p}_i)}{\sqrt{(\sum_i E_i)^2 - (\sum_i \vec{p}_i)^2}}$$

$$\vec{p}^{\,CM}_{\perp,j} = \vec{p}_{\perp,j}$$

Finalmente, para calcular la energía en el centro de masas, debemos sumar las energías de todas las partículas:

$$E_T^{CM} = \sum_j E_j^{CM} = \frac{(\sum_i E_i)\sum_j E_j - (\sum_i \vec{p}_i)\cdot\sum_j \vec{p}_j}{\sqrt{\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i\right)^2}} = \sqrt{\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i\right)^2}$$

2. Calcular la transformación a sistema de referencia de p_1.

Vamos a hacer lo mismo pero para el sistema de referencia donde p_1 se encuentra en reposo. Repitiendo el mismo argumento anterior, $\vec{p}_1$ transforma como

$$\vec{p}_1 \to \vec{p}_1 + (\gamma - 1)(\vec{p}_1\cdot\hat{v})\hat{v} - \gamma E_1\vec{v} = 0$$

por lo que haciendo el producto escalar con $\hat{v}$ y multiplicando por $\hat{v}$ obtenemos

$$(\vec{p}_1\cdot\hat{v})\hat{v} + (\gamma - 1)(\vec{p}_1\cdot\hat{v})\hat{v} - \gamma E_1\vec{v} = 0$$

De nuevo, restando ambas expresiones concluimos que $(\vec{p}_1\cdot\hat{v})\hat{v} = \vec{p}_1$ por lo que la ecuación que debe cumplirse es

$$\vec{p}_1 + (\gamma - 1)\vec{p}_1 - \gamma E_1\vec{v} = \gamma\left(\vec{p}_1 - E_1\vec{v}\right) = 0 \Longrightarrow \vec{v} = \frac{\vec{p}_1}{E_1}$$

De nuevo, esto nos permite calcular γ como

$$\gamma = \frac{E_1}{\sqrt{E_1^2 - p_1^2}} = \frac{E_1}{m_1}$$

Usando la transformación de la energía

$$E \to \gamma\left(E - \vec{v}\cdot\vec{p}\right)$$

Podemos escribir

$$E_j^{(1)} = \gamma(E_j - \vec{v}\cdot\vec{p}_j) = \frac{E_1E_j - \vec{p}_1\cdot\vec{p}_j}{m_1}$$

Y

$$\vec{p}^{\,(1)}_{\parallel,j} = \gamma(\vec{p}_{\parallel,j} - E_j\vec{v}) = \frac{E_1}{m_1}\left(\vec{p}_{\parallel,j} - E_j\frac{\vec{p}_1}{E_1}\right) = \frac{1}{m_1}\left(E_1\vec{p}_{\parallel,j} - E_j\vec{p}_1\right)$$

$$\vec{p}^{\,CM}_{\perp,j} = \vec{p}_{\perp,j}$$

3. Demostrar $s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$

Haciendo el cálculo explícitamente;

$$\begin{aligned} s + t + u &= (p_1 + p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 + (p_1 - p_4)^2 \\ &= (m_1^2 + m_2^2 + 2p_1\cdot p_2) + (m_1^2 + m_3^2 - 2p_1\cdot p_3) + (m_1^2 + m_4^2 - 2p_1\cdot p_4) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2m_1^2 + 2(p_1\cdot p_2 - p_1\cdot p_3 - p_1\cdot p_4) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2m_1^2 + 2p_1\cdot(p_2 - p_3 - p_4) \end{aligned}$$

Usando la conservación del cuadrimomento podemos reescribir $p_2 - p_3 - p_4 = -p_1$ por lo que nos queda

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2m_1^2 - 2p_1\cdot p_1 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

Demostrando la igualdad.